Mikroökonomie I

Übungsaufgaben Erwartungsnutzen

1. Warum ist die Varianz ein besseres Maß der Variabilität als die Spannweite?

   Die Spannweite ist der Unterschied zwischen dem höchsten möglichen Ergebnis und dem niedrigsten möglichen Ergebnis. Die Spannweite gibt allerdings die Wahrscheinlichkeiten der Beobachtung dieser hohen oder niedrigen Ergebnisse nicht an. Bei der Varianz wird die Differenz jedes Ergebnisses vom durchschnittlichen Ergebnis durch ihre Wahrscheinlichkeit gewichtet. Die Varianz bildet somit ein nützlicheres Maß der Variabilität als die Spannweite.

2. Warum legen manche Investoren einen großen Teil ihres Portfolios in riskanten Anlagen an, während andere hauptsächlich in risikofreie Alternativen investieren? (Hinweis: Erzielen die beiden Typen von Investoren durchschnittlich genau den gleichen Ertrag? Wenn ja, begründen Sie.)

   Auf einem Markt für riskante Anlagen, auf dem die Investoren risikoavers sind, verlangen sie einen höheren Ertrag auf Investitionen, die ein höheres Risikoniveau (eine höhere Varianz der Erträge) aufweisen. Obwohl manche Menschen bereit sind, für eine höhere Ertragsquote ein höheres Risikoniveau zu akzeptieren, bedeutet dies nicht, dass diese Personen weniger risikoavers sind. Im Gegenteil, diese Personen investieren nur in riskante Anlagen, wenn sie für das erhöhte Risiko entschädigt werden.

3. Betrachten Sie eine Lotterie mit drei möglichen Ergebnissen: 125 Euro werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 erzielt, 100 Euro mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 und 50 Euro mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5.

   a) Wie hoch ist der Erwartungswert der Lotterie?

      Der Erwartungswert, EV, der Lotterie ist gleich der Summe der Erträge gewichtet nach deren Wahrscheinlichkeiten:

      $$EV = (0,2)(125) + (0,3)(100) + (0,5)(50) = 80.$$

   b) Wie hoch ist die Varianz der Ergebnisse?

      Die Varianz,σ^2, ist die Summe der quadrierten Abweichungen vom Durchschnitt, 80 Euro, gewichtet nach deren Wahrscheinlichkeiten:

      $$\sigma^2 = (0,2)(125 - 80)2 + (0,3)(100 - 80)2 + (0,5)(80 - 80)2 = 975$$

   c) Wie viel würde eine risikoneutrale Person zahlen, um in der Lotterie mitzuspielen?

      Eine risikoneutrale Person würde den Erwartungswert der Lotterie zahlen: 80 Euro.

4. Richard überlegt, ob er ein Los der staatlichen Lotterie kaufen soll. Jedes Los kostet 1 Euro und die Wahrscheinlichkeit von Gewinnen gestaltet sich wie folgt:

Wahrscheinlichkeit	Ertrag in Euro
0,50	0,00
0,25	1,00
0,20	2,00
0,05	7,50

a) Wie hoch ist der Erwartungswert für Richards Auszahlung, wenn er ein Lotterielos kauft? Wie hoch ist die Varianz?

Der Erwartungswert der Lotterie ist gleich der Summe der nach ihren Wahrscheinlichkeiten gewichteten Erträge:

$$EV = (0,5)(0) + (0,25)(1,00) + (0,2)(2,00) + (0,05)(7,50) = 1,025$$

Die Varianz ist die Summe der nach ihren Wahrscheinlichkeiten gewichteten, quadrierten Abweichungen vom Durchschnitt, 1,025 Euro:

$$\sigma^2 = (0,5)(0 - 1,025)2 + (0,25)(1 - 1,025)2 + (0,2)(2 - 1,025)2 + (0,05)(7,5 - 1,025)2$$
$$= 2,812$$

b) Richards Spitzname ist "Rick Risikolos", da er ein äußerst risikoaverser Mensch ist. Würde er das Los kaufen?

Eine äußerst risikoaverse Person würde das Los wahrscheinlich nicht kaufen, obwohl das erwartete Ergebnis höher als der Preis ist, da gilt 1,025 ¿ 1,00. Die Differenz des erwarteten Ertrags ist nicht ausreichend, um Rick für das Risiko zu entschädigen. Wenn beispielsweise sein Vermögen 10 Euro umfasst, und er ein Los für 1,00 Euro kauft, hätte er bei den vier möglichen Ergebnissen jeweils 9,00 Euro, 10,00 Euro, 11,00 Euro und 16,50 Euro. Nehmen wir an, seine Nutzenfunktion lautet $U = W^{0.5}$, wobei W sein Vermögen ist. In diesem Fall ist sein erwarteter Nutzen gleich:

$$EU = (0,5)\sqrt{0} + (0,25)\sqrt{1,00} + (0,2)\sqrt{2,00} + (0,05)\sqrt{7,50} = 0 + 0,25 + 0,283 + 0,137$$
$$= 0.670$$

Dies ist weniger als 3,162, was der mit dem Verzicht auf den Kauf des Loses verbundene Nutzen ($U(10) = \sqrt{10} = 3,162$) ist. Er würde die sichere Alternative, d.h. 10 Euro, bevorzugen.

c) Welche Entscheidung würde der Bundesstaat langfristig gesehen angesichts des Preises eines Loses und der Wahrscheinlichkeits-/ Ertragstabelle im Bezug auf die Lotterie treffen?

Langfristig gesehen wäre die staatliche Lotterie bankrott! Bei dem Preis für ein Los und den Wahrscheinlichkeiten verliert die Lotterie Geld. Der Staat muss entweder den Preis eines Loses anheben oder die Wahrscheinlichkeit einer positiven Auszahlung senken.

5. Nehmen Sie an, Nataschas Nutzenfunktion wird durch $u(I) = \sqrt{10I}$ gegeben, wobei I das jährliche Einkommen in Tausend Euro darstellt.

   a) Ist Natascha risikofreudig, risikoneutral oder risikoavers? Begründen Sie.

   Natascha ist risikoavers. Um dies aufzuzeigen, nehmen wir an, dass sie 10.000 Euro hat und ihr ein Glücksspiel angeboten wird, bei dem eine fünfzigprozentige Wahrscheinlichkeit eines Gewinns von 1.000 Euro und eine fünfzigprozentige Wahrscheinlichkeit eines Verlustes von 1.000 Euro bestehen. Ihr Nutzen aus 10.000 Euro ist gleich 10, ($u(I) = \sqrt{10 \cdot 10}$). Ihr erwarteter Nutzen ist gleich:

   $$EU = 0,5\sqrt{90} + 0,5\sqrt{110} = 9,987 < 10.$$

   Sie würde das Glücksspiel nicht eingehen. Wäre sie risikoneutral, wäre sie zwischen den 10.000 Euround dem Glücksspiel indifferent, während sie als risikofreudige Person das Glücksspiel bevorzugen würde. Wir können auch erkennen, dass sie risikoavers ist, wenn wir beachten, dass die zweite Ableitung negativ ist, wodurch ein abnehmender Grenznutzen angegeben wird.

   b) Nehmen Sie an, Natascha erzielt gegenwärtig ein Einkommen in Höhe von 40.000 Euro (I = 40) und kann dieses Einkommen im nächsten Jahr mit Sicherheit erzielen. Ihr wird die Möglichkeit geboten, eine neue Anstellung anzunehmen, bei der eine Wahrscheinlichkeit von 0,6 besteht, dass sie ein Einkommen in Höhe von 44.000 Euro erzielt, und eine Wahrscheinlichkeit von 0,4 besteht, dass sie 33.000 Euro verdient. Sollte Sie die neue Anstellung annehmen?

   Der Nutzen ihres gegenwärtigen Einkommens beträgt $sqrt400$, was 20 entspricht. Der erwartete Nutzen der neuen Anstellung ist gleich

   $$EU = 0,6\sqrt{440} + 0,4\sqrt{330} = 19,985,$$

   was weniger als 20 ist. Folglich sollte sie die Anstellung nicht annehmen.

   c) Wäre Natascha in (b) bereit, eine Versicherung abzuschließen, um sich gegen das mit der neuen Anstellung verbundene, variable Einkommen abzusichern? Wenn dies der Fall ist, wie viel wäre sie für eine solche Versicherung zu zahlen bereit? (Hinweis: Wie hoch ist die Risikoprämie?)

   Wenn wir annehmen, das Natascha die neue Anstellung annimmt, wäre sie bereit, eine der Differenz zwischen 40.000 Euro und dem Nutzen des Glücksspiels entsprechende Risikoprämie zu zahlen, um sicherzustellen, dass sie ein Nutzenniveau von 20 erzielt. Wir wissen, dass der Nutzen des Glücksspiels gleich 19,85 ist. Durch Einsetzen in ihre Nutzenfunktion erhalten wir $19,85 = \sqrt{10I}$, und durch Auflösen nach I ermitteln wir das mit dem Glücksspiel verbundene Einkommen in Höhe von 39.410 Euro. Folglich wäre Natascha bereit, für die Versicherung eine Summe in Höhe der Risikoprämie zu zahlen: 40.000 - 39.410 = 590 Euro.

6. Eine Stadt erwägt, wie viel sie für die Überwachung der Parkuhren ausgeben sollte. Dem Stadtdirektor stehen die folgenden Informationen zur Verfügung:

   - Die Beschäftigung einer Person zur Überwachung der Parkuhren kostet 10.000 Euro pro Jahr.
   - Wird eine Person zur Überwachung der Parkuhren beschäftigt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrer jedes Mal, wenn er falsch parkt, einen Strafzettel erhält gleich 0,25.
   - Werden zwei Personen zur Überwachung der Parkuhren beschäftigt, liegt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Falschparker einen Strafzettel erhält bei 0,5, bei drei Personen zur Überwachung der Parkuhren liegt die Wahrscheinlichkeit bei 0,75, und bei vier Personen ist sie gleich eins.
   - Bei Beschäftigung von zwei Personen zur Überwachung der Parkuhren liegt die gegenwärtige Geldstrafe für das Überschreiten der Parkzeit bei 20 Euro.

   a) Nehmen Sie zunächst an, dass alle Fahrer risikoneutral sind. Welche Geldbuße für falsches Parken würden Sie erheben und wie viele Personen würden Sie zur Überwachung der Parkuhren einstellen (1, 2, 3 oder 4), um das gegenwärtige Niveau der Vermeidung von falschem Parken zu minimalen Kosten zu erreichen?

      Sind die Fahrer risikoneutral, wird ihr Verhalten nur durch die erwartete Geldbuße beeinflusst. Werden zwei Personen zur Überwachung der Parkuhren beschäftigt, liegt die Wahrscheinlichkeit, beim Falschparken erwischt zu werden bei 0,5, und die Geldbuße beträgt 20 Euro. Folglich beträgt die erwartete Geldbuße $10 = (0{,}5)(20)$ Euro. Um diese erwartete Geldbuße aufrechtzuerhalten, kann die Stadt eine weitere Person zur Überwachung der Parkuhren einstellen und die Geldbuße auf 40 Euro erhöhen oder drei Personen zur Überwachung der Parkuhren einstellen und die Geldbuße auf 13,33 Euro senken oder vier Personen zur Überwachung der Parkuhren einstellen und die Geldbuße auf 10 Euro senken.

      Wenn die einzigen zu minimierenden Kosten die der Anstellung von Personen zur Überwachung der Parkuhren, d.h. 10.000 Euro pro Jahr, sind, sollten Sie als Stadtdirektor die Anzahl dieser Angestellten minimieren. Sie sollten nur eine Person zur Überwachung der Parkuhren einstellen und die Geldbuße auf 40 Euro erhöhen, um das gegenwärtige Niveau der Abschreckung aufrechtzuerhalten.

   b) Nehmen Sie nun an, dass die Fahrer äußerst risikoavers sind. Wie würde sich in diesem Fall ihre Antwort auf (a) ändern?

      Sind die Fahrer risikoavers, ist ihr Nutzen eines bestimmten Ergebnisses größer als ihr Nutzen eines erwarteten Wertes der gleich einem bestimmten Einkommen ist. Sie vermeiden die Möglichkeit der Zahlung einer Geldbuße für Falschparken stärker als risikoneutrale Fahrer dies tun würden. Folglich

könnte mit einer Geldbuße von weniger als 40 Euro das gegenwärtige Niveau der Abschreckung aufrechterhalten werden.

7. Angenommen, Du hast 10000 Euro zum Wetten auf der Pferderennbahn. Ein Pferd names "Young Trustworthy" hat eine 90% Chance für den Sieg, der Gewinn wäre jedoch nur 10% des Einsatzes. Ein anderes Pferd "Old Risky", hat nur eine 10% Chance auf den Sieg, der Gewinn wäre jedoch das Zehnfache des Einsatzes.

   a) Du mußt Deine ganzen 10000 auf eines der beiden Pferde setzten. Wie sehen die Lotterien aus (Auszahlungen und Wahrscheinlichkeiten)?

      Young Trustworthy

      10% 0 Euro

      90% 11000 Euro

      Old Risky

      10% 100000 Euro

      90% 0 Euro

   b) Was ist der Erwartungswert der beiden Wetten?

$$EV_Y = 0.1 \times 0 + 0.9 \times 11000 = 9900$$
$$EV_O = 0.1 \times 100000 + 0.9 \times 0 = 10000$$

   c) Angenommen Deine Erwartungsnutzenfunktion ist $u(y) = 10\ln(y)$. Auf welches Pferd setzt Du? Warum?

$$u_Y = .9 \times 10 \ln 11000 = 83,7508$$
$$u_O = .1 \times 10 \ln 100000 = 11,5129$$

      Da der Erwartungsnutzen für Old Risky niedriger ist als für Young Trustworthy, sollte "ich" auf Young Trustworthy setzten.

   d) Berechne das Sicherheitsäquivalent und die Risikoprämie für die beiden Wetten.

      Das Sicherheitsäquivalent ist der Betrag bei dem der Nutzen aus der sicheren Zahlung gleich dem Erwartngsnutzen aus der Wette ist.

$$10 \ln x = 9 \ln 11000 = \ln 11000^9$$
$$x^{10} = 11000^9$$
$$x = 11000^{9/10} = 4337,6391$$

      Für Young Trustworthy gilt: CE = 4337,64, RP = 9900-4337,64=5562,36.

$$
\begin{aligned}
10 \ln x &= 1 \ln 100000 = \ln 100000 \\
x^{10} &= 100000 \\
x &= 100000^{1/10} = 3,1623
\end{aligned}
$$

Für Old Risky gilt: CE = 3,16, RP = 10000-3,16=9996,84.

e) Auf welches Pferd würdest Du setzen, wenn Deine Erwartungsnutzenfunktion $u(y) = 0.0001y^2$ wäre?

$$u_Y = 0.9 \times 0.0001(11000)^2 = 10890$$
$$u_O = 0.1 \times 0.0001(100000)^2 = 100000$$

Der Erwartungsnutzen für Old Trusty ist höher also sollte man auf ihn wetten.

f) Angenommen, Du wettest je 5000 Euro auf Sieg für jedes der beiden Pferde. Schreibe die zugehörige Lotterie auf. Berechne den Erwartungswert und den Erwartungsnutzen (Funktion aus c). Welche der drei Wetten würdest Du bevorzugen?

10% 0+50000
90% 5500+0

$$
\begin{aligned}
EV &= .1 \times 50000 + .9 \times 5500 = 9950 \\
u_{YO} &= 1 \ln 50000 + 9 \ln 5500 = 88,3323
\end{aligned}
$$

Die “diversifizierte” Wette hat einen höheren Erwartungsnutzen als die beiden “reinen” Wetten. Also ist die dritte Wette zu bevorzugen.